

非整数階時間微分を伴う時間依存する汎関数の劣微分作用素によって支配される非線形発展方程式の可解性とその応用

東北大学大学院理学研究科数学専攻
中島 慶人 (Yoshihito NAKAJIMA) *

概要

本発表では非整数階時間微分を伴う時間依存する汎関数の劣微分作用素によって支配される非線形抽象発展方程式の可解性とその応用について説明する. 非整数階時間微分作用素は, ライブニッツ則や連鎖律公式が破綻するなど多くの困難を引き起こす. そのため古典的な非線形偏微分方程式と比べると, 非整数階時間微分を伴う発展方程式に関しては分かっていないことが多い. 本発表ではこのような非線形発展方程式の可解性について得られた結果を述べる.

1 導入

本稿では, 実ヒルベルト空間 H に於ける次の非線形発展方程式の可解性について考える.

$$\frac{d}{dt}[k * (u - u_0)](t) + \partial\varphi^t(u(t)) \ni 0 \quad \text{in } H, \quad 0 < t < T. \quad (\text{P})$$

ただし $0 < T < \infty$ とし, 各 $t \in [0, T]$ に対して, $\partial\varphi^t : H \rightarrow 2^H$ はそれぞれ適正 ($\varphi^t \not\equiv +\infty$) 下半連続凸汎関数 $\varphi^t : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ の劣微分作用素を表し, $u_0 \in D(\varphi^0)$ は初期値とする. 方程式 (P) は, 初期条件を含んでいることに注意する. 以後, 作用素 $A : H \rightarrow 2^H$ とグラフ $G(A) \subset H \times H$ を同一視する. また非整数階時間微分作用素を例として含むように, 積分核 $k = k(t)$ は次の仮定をみたすとする:

(A.0) 関数 k は $L^1_{\text{loc}}([0, +\infty))$ に属する非負値減少関数とし, さらにある非負値減少関数 $\ell \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty))$ が存在して $k * \ell \equiv 1$ が成り立つ. (以後, この条件を $(k, \ell) \in P.C.$ とあらわすことにする).

ただし, 合成積 $*$ は次により定義する.

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s) \, ds \quad \text{for } t > 0.$$

* E-mail: yoshihito.nakajima.p8@dc.tohoku.ac.jp

仮定 (A.0) を満たす積分核 k (および ℓ) の具体例としては, 以下が挙げられる: $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$k_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \ell_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{for } t > 0.$$

このとき対応する微分作用素 $(d/dt)[k_\alpha * (u - u_0)]$ は α 階のリーマン・リュウビル微分 $\partial_t^\alpha(u - u_0)$ と一致する.

通常の 1 階時間微分の場合については, 例えば [4], [5], [6], [8] などが知られており, そこで得られた結果は, 境界が動く領域上の p -ラプラシアンを含む退化拡散方程式に対する初期値境界値問題などへ応用されている. 本研究では [4], [5], [6], [8] の結果を非整数階時間微分の場合へ拡張し, それを境界が動く領域上の非整数階時間微分と p -ラプラシアンを含む退化拡散方程式に対する初期値境界値問題へ応用することを目的とする.

2 主結果

方程式 (P) の強解を次のように定義する.

定義 2.1 ((P) の強解). 初期値 $u_0 \in D(\varphi^0)$ に対して, 次の 2 つの条件が成立するとき $u \in L^2(0, T; H)$ を $[0, T]$ における問題 (P) の強解と呼ぶ.

- (i) $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0, T; H)$ および $[k * (u - u_0)](0) = 0$ が成り立つ.
- (ii) 次をみたすような $\eta \in L^2(0, T; H)$ が存在する:
 - $\eta(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$.
 - $\frac{d}{dt}[k * (u - u_0)](t) + \eta(t) = 0$ in H for a.e. $t \in (0, T)$.

次に主結果で用いる仮定を導入する.

(A.1) 次をみたす $\alpha \in W^{1,2}(0, T)$ および $\beta \in W^{1,1}(0, T)$ が存在する: $s \leq t$ をみたす任意の $s, t \in [0, T]$ および $z \in D(\varphi^s)$ に対して, 次をみたす $z_{s,t} \in D(\varphi^t)$ が存在する.

$$\begin{aligned} \|z_{s,t} - z\|_H &\leq |\alpha(t) - \alpha(s)| \left(1 + |\varphi^s(z)|^{1/2}\right), \\ \varphi^t(z_{s,t}) &\leq \varphi^s(z) + |\beta(t) - \beta(s)| (1 + |\varphi^s(z)|). \end{aligned}$$

このとき, 次の主結果を証明することができた.

定理 2.1 ((P) の強解の存在). 仮定 (A.0) および (A.1) が成立するとき, 問題 (P) の強解 $u \in L^2(0, T; H)$ がただ一つ存在する.

以下では定理 2.1 の偏微分方程式への応用例について述べる. 次の p -ラプラシアンを含む退化拡散方程式の可解性について考える.

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha(u - u_0) - \Delta_p u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{PP})$$

ただし, 各 $t \in [0, T]$ に対して Ω_t は滑らかな境界 $\partial\Omega_t$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の有界領域とし $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ の部分集合 Q, Γ をそれぞれ $Q = \bigcup_{t \in [0, T]} (\{t\} \times \Omega_t)$ および $\Gamma = \bigcup_{t \in [0, T]} (\{t\} \times \partial\Omega_t)$ とする. また

$2 \leq p < \infty$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap L^2(\Omega_0)$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ とする. ここで Q は次をみたす集合とする.

(B) 次をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域 Ω が存在する.

(i) $\overline{Q} \subset [0, T] \times \Omega$ が成り立つ.

(ii) 次をみたす C^∞ 級写像 $H, H^{-1} : [0, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ が存在する:

- 任意の $t \in [0, T]$ に対して, $H(t, \Omega_0) = \Omega_t$ および $H^{-1}(t, \Omega_t) = \Omega_0$ が成り立つ.
- 任意の $(t, x) \in [0, T] \times \Omega_0$ に対して, $H^{-1}(t, H(t, x)) = x$ が成り立つ.
- 任意の $(t, x) \in Q$ に対して, $H(t, H^{-1}(t, x)) = x$ が成り立つ.

また, 初期値境界値問題の強解を次のように定義する.

定義 2.2 ((PP) の強解). 仮定 (B) をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域 Ω および初期値 $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap L^2(\Omega_0)$ に対して, 次の 4 つの条件 (i) - (iv) が成立するとき, $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ を $[0, T]$ における問題 (PP) の強解と呼ぶ.

(i) $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ および $[k * (u - u_0)](0) = 0$ が成り立つ.

(ii) $u(t, \cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega_t)$ for a.e. $t \in (0, T)$ が成り立つ.

(iii) $\Delta_p u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ が成り立つ.

(iv) 次の方程式をみたす:

$$\frac{d}{dt} [k * (u - u_0)](t, x) - \Delta_p u(t, x) = 0 \quad \text{for a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

このとき, 定理 2.1 を応用することで (PP) の強解の存在を示すことができた.

定理 2.2. 仮定 (A.0) および (B) が成立するとき, 問題 (PP) の強解 $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ が一意に存在する. ここで Ω は仮定 (B) をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域である.

3 準備

3.1 劣微分作用素

定義 3.1. 実ヒルベルト空間 H における適正 ($\varphi \not\equiv \infty$) 下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ に対して, 次をみたす多価作用素 $\partial\varphi \subset H \times H$ を φ の劣微分作用素と呼ぶ.

$$\partial\varphi = \{[w, \xi] \in H \times H : \text{任意の } z \in H \text{ に対して } \varphi(z) - \varphi(w) \geq (\xi, z - w)_H\}.$$

また $D(\varphi) := \{u \in H : \varphi(u) < \infty\}$, $D(\partial\varphi) := \{u \in H : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分作用素は, 滑らかな凸汎関数のフレシェ微分を下半連続凸汎関数に対して一般化した概念である. 実際, 適正下半連続凸汎関数 φ が点 $v \in H$ でフレシェ微分可能である場合, $\partial\varphi(v) = \{\varphi'(v)\}$ が成り立つ. さらに $\partial\varphi$ は極大単調作用素である. すなわち, 次の事実が成り立つ.

- 任意の $(x_1, y_1) \in \partial\varphi$ および $(x_2, y_2) \in \partial\varphi$ に対して $(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$ が成り立つ.

- 任意の $\lambda > 0$ および $v \in H$ に対して $u + \lambda \partial \varphi(u) \in v$ をみたす $u \in D(\partial \varphi)$ が唯一つ存在する.

極大単調作用素の理論を用いることにより, 劣微分作用素は吉田近似と呼ばれるリプシッツ作用素により近似することができる.

命題 3.1 ([2], Theorem 2.9). 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ と任意の $\lambda > 0$ に対して $\varphi_\lambda : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を以下で定める (関数 φ_λ をモロー・吉田正則化と呼ぶ).

$$\varphi_\lambda(u) := \inf \left\{ \varphi(v) + \frac{1}{2\lambda} \|v - u\|_H^2 : v \in H \right\} \quad \text{for } u \in H.$$

このとき φ_λ は次の性質をみたす.

- (i) φ_λ は凸であり H 上全体でフレシェ微分可能である.
- (ii) 任意の $u \in H, \lambda > 0$ に対して $\varphi(J_\lambda u) \leq \varphi_\lambda(u) \leq \varphi(u)$ である. ただし $J_\lambda = (I + \lambda \partial \varphi)^{-1}$ とする. また $\lambda \rightarrow +0$ とすると, $\varphi_\lambda(u) \rightarrow \varphi(u)$ となる.
- (iii) 任意の $\lambda > 0$ に対して $\partial(\varphi_\lambda)(u) = \{\varphi'_\lambda(u)\}$ である. ここで, $\varphi'_\lambda(u)$ は点 u における φ_λ のフレシェ微分である. また $\partial \varphi$ の吉田近似 $(\partial \varphi)_\lambda$ と φ_λ の劣微分作用素 $\partial(\varphi_\lambda)$ は一致する (以後 $\partial(\varphi_\lambda)(u)$ の括弧を省略して $\partial \varphi_\lambda(u)$ と書く. また, $\partial \varphi_\lambda$ を多価関数ではなく関数 $\partial \varphi_\lambda : H \rightarrow H$ と同一視する).
- (iv) 任意の $\lambda > 0$ に対して $\partial \varphi_\lambda : H \rightarrow H$ はリプシッツ連続である.
- (v) 任意の点列 $v_n = \partial \varphi_{1/n}(u_n)$ および $(u, v) \in H \times H$ に対して, u_n が u に H 上で強収束し, v_n が v に H 上で弱収束するならば $(u, v) \in \partial \varphi$ となる.

劣微分作用素の吉田近似の例として, 次の例が挙げられる.

命題 3.2 ([7], Chapter IV. Example 2.C). 測度有限な可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ に対して $\Psi^\varphi : L^2(\Omega; H) \rightarrow (-\infty, \infty]$ を以下の適正下半連続凸汎関数とする.

$$\Psi^\varphi(u) := \begin{cases} \int_\Omega \varphi(u(x)) \, dx & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \in L^1(\Omega), \\ \infty & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

このとき, 次が成り立つ.

- (i) 任意の $\lambda > 0$ に対して, 適正下半連続凸汎関数 Ψ^φ は次をみたす凸汎関数となる.

$$\Psi_\lambda^\varphi(u) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(x)) \, dx \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

また, 劣微分作用素 $\partial \Psi^\varphi$ の吉田近似 $\partial \Psi_\lambda^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial \Psi_\lambda^\varphi(u) = \varphi_\lambda(u) \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

- (ii) 劣微分作用素 $\partial \Psi^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial \Psi^\varphi = \{g \in L^2(\Omega; H) : g(x) \in \partial \varphi(u(x)) \text{ for a.e. } x \in \Omega\} \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

最後に仮定 (A.1) から得られる凸汎関数の性質を述べる.

命題 3.3 ([5], Theorem 1.5.1). 各 $t \in [0, T]$ に対して, $\varphi^t : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸汎関数とする. もし仮定 (A.1) が成立するならば, 次をみたす定数 $C_0 \in \mathbb{R}$ が存在する

$$\varphi^t(z) \geq -C_0(1 + |z|_H) \quad \text{for all } t \in [0, T], z \in H.$$

3.2 連鎖律

通常の 1 階微分の場合, 次の凸汎関数に関する連鎖律がよく知られている.

命題 3.4 ([7], Chapter IV, Lemma 4.3). 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ と $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ に対して, $g_u(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$ をみたす $g_u \in L^2(0, T; H)$ が存在するとする. このとき $\varphi(u) \in W^{1,1}(0, T)$ であり, 次の等式が成立する.

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) = \left(h, \frac{du}{dt} \right)_H \quad \forall h \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

命題 3.5 ([5], Lemma 1.2.5). 各 $t \in [0, T]$ に対して, $\varphi^t : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸汎関数とする. もし仮定 (A.1) が成立するならば, 次をみたす非負関数 $\eta_1, \eta_2 \in L^1(0, T)$ および正の定数 $\delta \in (0, 1)$ が存在する: 各 $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ および $\lambda > 0$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} & \varphi_\lambda^t(u(t)) - \int_0^t (u'(r), \partial\varphi_\lambda^t(u(r)))_H dr \\ & \leq \varphi_\lambda^0(u(0)) + \int_0^t \delta \|\partial\varphi_\lambda^t(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r)|\varphi_\lambda^t(u(r))| + \eta_2(r) dr. \end{aligned}$$

合成積を伴う微分の場合, 次の連鎖律不等式が成り立つ.

命題 3.6 ([1], Proposition 3.4). 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ に対して $u_0 \in D(\varphi)$ とする. また $k \in W^{1,1}(0, T)$ は $k(t) \geq 0, k'(t) \leq 0$ for a.e. $t \in (0, T)$ をみたすとする. さらに $u, g \in L^2(0, T; H)$ は $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0, T)$ および $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left(\frac{d}{dt}[k * (u - u_0)](t), g(t) \right)_H \geq \frac{d}{dt}[k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

しかし非整数階時間微分を考える場合, 考える積分核 k_α は非負かつ減少関数であるが, 原点で特異性を持つためソボレフ空間 $W^{1,1}(0, T)$ の元にならず, 上の命題をそのまま適用することができない. しかし m -増大作用素と completely positive kernel の理論を用いることにより, 命題 3.6 と同等の不等式を得ることができる (命題 3.10 参照).

3.3 m -増大作用素

本節では, Completely Positive Kernel の性質を述べる際に必要な m -増大作用素の性質について述べる.

定義 3.2. 実バナッハ空間 X に対し、次をみたす作要素 $A \subset X \times X$ を A の **増大作用素** と呼ぶ.

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \|(x_1 + \alpha y_1) - (x_2 + \alpha y_2)\|_X \quad \text{for all } [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A, \alpha > 0.$$

さらに、増大作用素 $A \subset X \times X$ が次をみたすとき A を **m-増大作用素** と呼ぶ.

任意の $\alpha > 0$, $w \in X$ に対して $w = x + \alpha y$ をみたすような $[x, y] \in A$ が唯一つ存在する.

また $D(A) = \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ とする.

定義 3.3. 任意の $\lambda > 0$, m-増大作用素 A に対して、 A のレゾルベント $J_\lambda^A : X \rightarrow D(A)$, A の吉田近似 $A_\lambda : X \rightarrow X$ をそれぞれ次の作用素とする.

$$J_\lambda^A(u) := (I + \lambda A)^{-1}(u) \quad \text{for all } u \in X, \quad A_\lambda := \frac{1}{\lambda} (I - J_\lambda^A)(u) \quad \text{for all } u \in X.$$

ここで、 $I : X \rightarrow X$ は恒等写像とする. m-増大作用素の定義から、 J_λ^A は well-defined である. また吉田近似の定義から、 A が線形作用素の場合、 $A_\lambda = A(J_\lambda^A f)$ が成り立ち、さらに $f \in D(A)$ をみたすならば $A_\lambda f = A(J_\lambda^A f) = J_\lambda^A A f$ が成立する.

命題 3.7 ([7], Chapter IV, Proposition 7.1, Proposition 7.2). 任意の m-増大作用素 $A \subset X \times X$ に対して、次の性質をみたす.

- (i) 任意の $u \in X$, $\lambda > 0$ に対して、 $A_\lambda u \in A(J_\lambda^A u)$ である.
- (ii) 任意の $u \in \overline{D(A)}^X$ に対して、 $\lim_{\lambda \rightarrow +0} J_\lambda^A(u) = u$ である.
- (iii) グラフ $A \subset X \times X$ は閉である. 特に A が線形作用素のとき、グラフ A が凸集合となるため弱閉となり次が成立する.

任意の数列 $(u_n, v_n) \in A$ および $(u, v) \in X \times X$ に対して、
 u_n が u に弱収束し、 v_n が v に弱収束するならば $(u, v) \in A$ である.

3.4 Completely positive kernels

まず、次の命題が成り立つことが知られている.

命題 3.8 ([3], Theorem 2.2, [9], Section 2). $(k, \ell) \in P.C.$ とする. 任意の $\lambda > 0$ に対して $s_\lambda \in W_{\text{loc}}^{1,1}([0, \infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$s_\lambda(t) + \lambda[\ell * s_\lambda](t) = 1 \quad \text{for } t > 0.$$

このとき $s_\lambda \geq 0$, $s'_\lambda \leq 0$ が成り立つ. 特に $k_\lambda := \lambda s_\lambda \in W_{\text{loc}}^{1,1}([0, \infty))$ とすると $k_\lambda \geq 0$, $k'_\lambda \leq 0$ が成り立つ. また $h_\mu \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$h_\mu(t) + \mu(\ell * h_\mu)(t) = \mu \ell(t) \quad \text{for } t > 0.$$

このとき $h_\mu \geq 0$, $k_\mu = h_\mu * k_\mu$ をみたす.

ここで X を実バナッハ空間 $1 \leq p \leq \infty$ とし, 線形作用素 $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L^p(0, T; X) \rightarrow L^p(0, T; X)$ を次で定める.

$$D(\mathcal{B}) := \{v \in L^p(0, T; X) : k * v \in W^{1,p}(0, T; X), [k * v](0) = 0\},$$

$$\mathcal{B}v := \frac{d}{dt}(k * v) \quad \text{for } v \in D(\mathcal{B}).$$

このとき, 命題 3.8 から次の事実が成り立つ. 特に $\mathcal{B}$ は m -増大作用素となる.

- 任意の $f \in L^p(0, T; X)$ に対して $J_\lambda(f) := \frac{d}{dt}[\ell * k_\lambda * f]$ とすると $J_\lambda(f) + \frac{1}{\lambda}J_\lambda(f) = f$.
- 任意の $f, g \in L^p(0, T; X)$ に対して $\|J_\lambda(f) - J_\lambda(g)\|_{L^p(0, T; X)} \leq \|f - g\|_{L^p(0, T; X)}$.

ここで命題 3.7 を用いることにより, 次の命題が従う.

命題 3.9 ([1], Section 3, [9], Section 2). 実バナッハ空間 X , $1 \leq p \leq \infty$, $(k, \ell) \in P.C.$ とする. また $v \in L^p(0, T; X)$ が $k * v \in W^{1,p}(0, T; X)$ と $(k * v)(0) = 0$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ.

$$k_n \rightarrow k \quad \text{in } L^1(0, T), \quad \frac{d}{dt}[k_n * v] \rightarrow \frac{d}{dt}[k * v] \quad \text{in } L^p(0, T; X).$$

また, 任意の点列 $u_n \in D(\mathcal{B})$ および $v_n := \mathcal{B}u_n$ に対して, u_n が u に $L^p(0, T; X)$ 上で弱収束し v_n が v に $L^p(0, T; X)$ 上で弱収束するならば, $u \in D(\mathcal{B})$ であり $v = \mathcal{B}u$ となる. また任意の $f \in L^p(0, T; X)$ に対して, 次が成り立つ.

$$h_n * f \rightarrow f \quad \text{in } L^p(0, T; X).$$

命題 3.6 および命題 3.9 を組み合わせることにより, 次の主張が成立する.

命題 3.10. 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ に対して $u_0 \in D(\varphi)$, $(k, \ell) \in P.C.$ とする. さらに $u \in L^2(0, T; H)$ が $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0, T; H)$, $[k * (u - u_0)](0) = 0$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0, T)$ をみたすとする. また $g(t) \in L^2(0, T; H)$ が $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left[\ell * \left(\frac{d}{ds}[k * (u - u_0)](\cdot), g(\cdot) \right)_H \right] (t) \geq \varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T),$$

$$\int_0^t \left(\frac{d}{ds}[k * (u - u_0)](s), g(s) \right)_H ds \geq [k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

4 証明の概略

定理 2.2 は定理 2.1 を適用して得られる結果であるため, ここでは定理 2.1 の証明のみ行う.

簡単のため, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $\partial\varphi^t$ は一価作用素とする.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\varphi^t$ を $\partial\varphi_{1/n}^t$ により近似をし, さらに $(1/n)(d/dt)(u - u_0)$ を加えた近似問題 (P_n) の可解性を考える.

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dt}(u_n - u_0)(t) + \frac{d}{dt}[k * (u - u_0)](t) + \partial\varphi_{1/n}^t(u(t)) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (\text{P}_n)$$

このとき (P_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.1. 次をみたす $u_n \in W^{1,2}(0, T; H)$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} u_n(0) &= u_0, \\ \frac{1}{n} \frac{d}{dt}(u_n - u_0) + \frac{d}{dt}[k * (u_n - u_0)] + \partial \varphi_{1/n}(u_n) &= 0 \quad \text{in } L^2(0, T; H). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $(1/n)(d/dt)(u_n - u_0)$ の項を付け加えることによって, 命題 3.4, 3.5 の連鎖律を用いることができるため, より多くの一様評価が成り立つような近似問題となっている. つぎにア・プリオリ評価を導出する. 方程式 (1) の両辺に $(d/dt)(u_n - u_0)$ をかけ $(0, t)$ で積分を行うことにより, 命題 3.4, 3.5 および命題 3.10 の連鎖律を用いて次の不等式を示すことができる.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{1}{n} \left\| \frac{d}{dr}(u_n - u_0)(r) \right\|_H^2 dr + \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_H^2 \right](t) + \varphi_{1/n}^t(u_n(t)) \\ & \leq \varphi^0(u_0) + |\eta_2|_{L^1(0, T)} + \int_0^t \|\partial \varphi_\lambda^r(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r) \varphi_\lambda^r(u(r)) dr. \end{aligned}$$

for all $t \in (0, T)$. ここで $\eta_1, \eta_2 \in L^1(0, T)$ は命題 3.5 をみたす非負関数とする. ここで, 命題 3.3 より, n に依存しない定数 $C_0 > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{1}{n} \left\| \frac{d}{dr}(u_n - u_0)(r) \right\|_H^2 dr + \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_H^2 \right](t) + |\varphi_{1/n}^t(u_n(t))| \\ & \leq C_0 \left[1 + |\varphi^0(u_0)| + |\eta_2|_{L^1(0, T)} + \int_0^t \|\partial \varphi_\lambda^r(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r) |\varphi_\lambda^r(u(r))| dr \right]. \end{aligned}$$

ここで, 次の不等式を用いた.

$$\|u_n(t) - u_0\|_H^2 \leq |\ell|_{L^1(0, T)} \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_H^2 \right](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

従って, 方程式 (1) から次の不等式評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right) \left\| \frac{d}{dr}(u_n - u_0)(r) \right\|_H^2 dr + \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_H^2 \right](t) + |\varphi_{1/n}^t(u_n(t))| \\ & \leq C_0 \left[1 + |\varphi^0(u_0)| + \int_0^t \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)](r) \right\|_H^2 + \eta_1(r) |\varphi_\lambda^r(u(r))| dr \right] \\ & = C_0 \left[1 + |\varphi^0(u_0)| + \int_0^t \eta_1(r) |\varphi_\lambda^r(u(r))| dr + \left[k * \left[\ell * \left\| \frac{d}{ds} k * (u_n - u_0) \right\|_H^2 \right] \right](t) \right]. \end{aligned}$$

for all $t \in (0, T)$. ここでボルテラ型積分不等式を用いることによって, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left\| \varphi_{1/n}(u_n(\cdot)) + \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\| \right](\cdot) \right\|_{L^\infty(0, T)} \right] < \infty.$$

特に, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_{L^2(0, T; H)}^2 \right] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\left\| k * \left[\ell * \left\| \frac{d}{dr}[k * (u_n - u_0)] \right\|_H^2 \right] \right\|_{L^\infty(0, T)} \right] < \infty.$$

従って、次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sqrt{n} \left\| \frac{1}{n} \frac{d}{dr} (u_n - u_0) \right\|_{L^2(0,T;H)} \right] < \infty.$$

方程式 (1) より、次の一様な不等式が成り立つ.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\partial \varphi_{1/n}(u_n)\|_{L^2(0,T;H)} < \infty.$$

最後に、これらのア・プリオリ評価を用いて近似解の収束を証明する. 方程式 (1) より、次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dt} u_n(t) - \frac{1}{m} \frac{d}{dt} u_m(t) + \frac{d}{dt} [k * (u_n - u_m)](t) + \partial \varphi_{1/n}^t(u_n(t)) - \partial \varphi_{1/m}^t(u_m(t)) = 0$$

for a.e. $t \in (0, T)$. 一様評価および連鎖律不等式により、方程式の両辺に $u_n - u_m$ をかけて $(0, t)$ で積分することで、次の不等式をみたす n, m に依存しない定数 $C_1 \geq 0$ が存在する.

$$[k * \|u_n - u_m\|_H^2](t) \leq C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

ここで、次の不等式を用いた.

$$\begin{aligned} & (\partial \varphi_{1/n}^t(u_n(t)) - \partial \varphi_{1/m}^t(u_m(t)), u_n(t) - u_m(t))_H \\ & \geq -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) (\|\partial \varphi_{1/n}^t(u_n(t))\|_H^2 + \|\partial \varphi_{1/m}^t(u_m(t))\|_H^2) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

従って、次の不等式が成り立つ.

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(0,T;H)}^2 = \left\| \ell * [k * \|u_n - u_m\|_H^2] \right\|_{L^\infty(0,T)} \leq C_1 |\ell|_{L^1(0,T)} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \right).$$

特に $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ は $L^2(0, T; H)$ のコーシー列となり、次をみたす関数 $u \in L^2(0, T; H)$ が存在する.

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(0, T; H).$$

ここで命題 3.1, 3.2 を用いると u が初期値問題 (P) の強解であることを示すことができる. 最後に一意性を証明する. 関数 $u, v \in L^2(0, T; H)$ が方程式 (P) の解とする. このとき、次の等式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} [k * (u - v)](t) + \partial \varphi^t(u(t)) - \partial \varphi^t(v(t)) = 0$$

for a.e. $t \in (0, T)$. 上の方程式の両辺に $u - v$ をかけて $(0, t)$ で積分することにより、次の不等式が成り立つ.

$$[k * \|u - v\|_H^2](t) \leq 0$$

for a.e. $t \in [0, T]$. ここで、命題 3.10 および $\partial \varphi^{\cdot}$ が極大単調作用素であることを用いた. 従って次の不等式が成り立つ.

$$\int_0^T \|u(r) - v(r)\|_H^2 dr = [\ell * k * \|u - v\|_H^2](T) \leq 0.$$

特に $\|u - v\|_{L^2(0,T;H)} = 0$ が成り立ち、解の一意性が証明された.

参考文献

- [1] G. Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, *Israel J. Math.*, **234** (2019), 809–862.
- [2] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.
- [3] Ph. Clément and J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 514–535.
- [4] K. Nobuyuki, Some nonlinear parabolic variational inequalities, *Israel J. Math.*, **22** (1975), no. 3-4, 304—331.
- [5] K. Nobuyuki, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, *Chiba Univ.*, (1981) 1–87.
- [6] M. Ôtani, Nonlinear evolutions with time-dependent constraints *Adv. Math. Sci. Appl.*, **3** (1993/94), 383–399
- [7] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [8] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators., *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **23** (1976), no. 3, 491—515.
- [9] R. Zacher, Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients, *J Math. Anal. Appl.* **348** (2008), 137—149.